



Тема: Розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей

Мета:

- *Навчальна:* закріпити вміння розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння математичною мовою висловлювати власну думку; правильно користуватись термінологією пов'язаною з вивченою темою;
- *Виховна:* виховувати наполегливість; вміння робити правильні висновки та бачити кінцеву мету;

Компетенції:

- *Математична компетентність:*
 - *Уміння:* оперувати числовою інформацією; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач;
 - *Ставлення:* усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві, розвитку технологічного, економічного і оборонного потенціалу держави, успішного вивчення інших дисциплін;
 - *Навчальні ресурси:* розв'язування математичних задач;

Тип уроку: удосконалення умінь і навичок;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

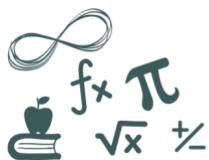
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Які рівняння називають логарифмічним?
- Які нерівності називаються найпростішими логарифмічними нерівностями?
- Чи існує логарифм від'ємного числа або нуля?
- Як розв'язати рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$?
- Як розв'язати найпростішу логарифмічну нерівність? Наведіть приклад.
- Сформулюйте основну логарифмічну тотожність



- Сформулюйте основні властивості логарифмів
- Як розв'язувати більш складні логарифмічні рівняння? Чи можна дотримуватися якогось єдиного алгоритму?
- Як розв'язати нерівність типу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність типу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $0 < a < 1$?
- Запишіть формулу переходу від однієї основи до іншої та наслідки з неї
- У чому полягає графічний спосіб розв'язування логарифмічних рівнянь?

III. Розв'язування задач

№1

Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 10	$\lg 10 = 1$
2) 1000	$\lg 1000 = 3$
3) 0,01	$\lg 0,01 = -2$
4) 0,000001	$\lg 0,000001 = -6$

№2

Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_4 x = \frac{1}{2}$
3) $\log_x 2 = 2$

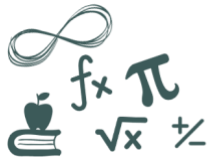
2) $\log_2 x = 0$

Розв'язок:

1) $\log_4 x = \frac{1}{2}$
 $x = 4^{\frac{1}{2}}$

2) $\log_2 x = 0$
 $x = 2^0 = 1$

3) $\log_x 2 = 2$
 $2 = x^2$
 $x = \sqrt{2}$



Розв'яжіть рівняння:

1) $5^x = 10$

2) $2^{x-3} = 5$

3) $0,3^{3x+2} = 7$

Розв'язок:

1) $5^x = 10$

$$x = \log_5 10$$

Відповідь: $\log_5 10$

2) $2^{x-3} = 5$

$$x - 3 = \log_2 5$$

$$x = 3 + \log_2 5$$

Відповідь: $3 + \log_2 5$

3) $0,3^{3x+2} = 7$

$$3x + 2 = \log_{0,3} 7$$

$$3x = \log_{0,3} 7 - 2$$

$$x = \frac{1}{3}(\log_{0,3} 7 - 2)$$

Відповідь: $\frac{1}{3}(\log_{0,3} 7 - 2)$

№4

Обчисліть:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$

2) $6^{1+\log_6 5}$

3) $2^{3\log_2 5+4}$

4) $8^{1-\log_2 3}$

5) $\log_9 \log_2 8$

6) $\log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

Розв'язок:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6} = (3^{-1})^{\log_3 6} = 3^{-\log_3 6} = 3^{\log_3 6^{-1}} = 3^{\log_3 \frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

Відповідь: $\frac{1}{6}$;

2) $6^{1+\log_6 5}$

$$6^{1+\log_6 5} = 6^1 + 6^{\log_6 5} = 6 \cdot 5 = 30$$

Відповідь: 30;



3) $2^{3 \log_2 5 + 4}$

$$2^{3 \log_2 5 + 4} = 2^{\log_2 5^3 + 4} = 2^{\log_2 125} \cdot 2^4 = 125 \cdot 16 = 2000$$

Відповідь: 2000;

4) $8^{1 - \log_2 3}$

$$8^{1 - \log_2 3} = 8^1 : 8^{\log_2 3} = 8 : 2^{3 \log_2 3} = 8 : 2^{\log_2 3^3} = 8 : 3^3 = \frac{8}{27}$$

Відповідь: $\frac{8}{27}$;

5) $\log_9 \log_2 8$

$$\log_9 \log_2 2^3 = \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

Так як $\log_2 2^3 = 3$

Відповідь: $\frac{1}{2}$

6) $\log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

$$\log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$;

№5

Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+3} - 3 \cdot 5^{x+1} - 10 \cdot 5^x = 4$

2) $3^{x+1} - 8 = 3^{1-x}$

Розв'язок:

1) $5^{x+3} - 3 \cdot 5^{x+1} - 10 \cdot 5^x = 4$
 $5^x(5^3 - 3 \cdot 5^1 - 10) = 4$

$$5^x \cdot 100 = 4$$

$$5^x = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$5^x = 5^{-2}$$

$$x = -2$$

Відповідь: -2;

Винесли за дужки спільний множник 5^x

Поділили обидві частини рівняння на 100

Так як ці степені числа 5 рівні, то рівні також і показники їх степенів.

За теоремою, розглянутою на уроці №1

$$\left. \begin{array}{l} a^{x_1} = a^{x_2} \\ a > 0 \text{ і } a \neq 1 \end{array} \right| \Leftrightarrow x_1 = x_2$$



2) $3^{x+1} - 8 = 3^{1-x}$

Розв'язок:

$$3^x \cdot 3^1 - 8 = \frac{3^1}{3^x}$$
$$3^x \cdot 3 - 8 = \frac{3}{3^x}$$

Нехай $\begin{cases} t = 3^x \\ t > 0 \end{cases}$

$$3t - 8 = \frac{3}{t}$$

$$3t^2 - 8t = 3$$

$$3t^2 - 8t - 3 = 0$$

$$D = 64 + 36 = 100 = 10^2$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm 10}{6} = \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (не задовольняє, так як } t > 0 \text{)}$$

$$t = 3^x \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

Відповідь: 1;

Використали властивості степеня з дійсним показником

№6

Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[10]{2x^2 - 14,5x} < \frac{1}{8}$

2) $\frac{1}{3^{x+5}} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$

Розв'язок:

1) $\sqrt[10]{2x^2 - 14,5x} < \frac{1}{8}$

$$2^{\frac{x^2 - 14,5x}{10}} < 2^{-3}$$

$$\frac{x^2 - 14,5x}{10} < -3$$

$$x^2 - 14,5x < -30$$

$$x^2 - 14,5x + 30 < 0$$

$$f(x) = x^2 - 14,5x + 30$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

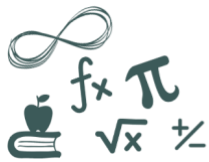
Більш зручний для розв'язку запис нерівності $\sqrt[10]{2x^2 - 14,5x} < \frac{1}{8}$

За теоремою, розглянутою на уроці №5

Якщо $a > 1$ і $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то $f(x) > g(x)$

Якщо $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$

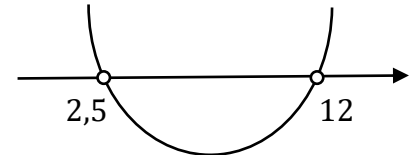
Помножили обидві частини рівняння на 10



2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - 14,5x + 30 = 0$
 $D = 210,25 - 120 = 90,25 = 9,5^2$
 $x_{1,2} = \frac{14,5 \pm 9,5}{2} = \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = 2,5 \end{cases}$

Так як знак нерівності « $<$ », оберемо проміжок $(2,5; 12)$

Відповідь: $x \in (2,5; 12)$



2) $\frac{1}{3^{x+5}} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$

$$\frac{1}{3^x + 5} \leq \frac{1}{3^x \cdot 3^1 - 1}$$

Нехай $\begin{cases} t = 3^x \\ t > 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{t+5} \leq \frac{1}{3t-1}$$

$$\frac{1}{t+5} - \frac{1}{3t-1} \leq 0$$

$$\frac{3t-1-t-5}{(t+5)(3t-1)} \leq 0$$

$$\frac{2t-6}{(t+5)(3t-1)} \leq 0$$

1. ОДЗ:

$$(t+5)(3t-1) \neq 0$$

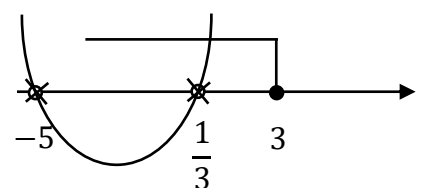
Врахуємо, що $t > 0$

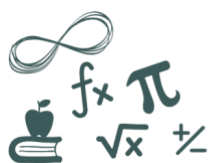
$$t \neq -5$$

$$t \neq \frac{1}{3}$$

Отже $\begin{cases} t < -5 \\ t > \frac{1}{3} \end{cases}$

2. Нулі функції $f(x)$: $\frac{2t-6}{(t+5)(3t-1)} = 0$
 $2t - 6 = 0$





$$2t = 6$$

$$t = 3$$

Так як знак нерівності « \leq », оберемо проміжок $(-\infty; 3]$

Отже, розв'язок нерівності $t \in \left(\frac{1}{3}; 3\right]$

$$\left. \begin{array}{l} t = 3^x \\ t > \frac{1}{3} \\ t \leq 3 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{1}{3} < 3^x \leq 3$$

$$\frac{1}{3} < 3^x \leq 3$$

$$3^{-1} < 3^x \leq 3^1$$

$$\begin{array}{l} -1 < x \leq 1 \\ (-1; 1] \end{array}$$

Більш зручний для розв'язку запис
нерівності $\frac{1}{3} < 3^x \leq 3$

За теоремою, розглянутою на уроці №5
Якщо $a > 1$ і $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, то $f(x) > g(x)$
Якщо $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$

Відповідь: $(-1; 1]$

№7

Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) = -4$

2) $\log_2 x + \log_5 x = \frac{1}{\lg 5}$

Розв'язок:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) = -4$

$$x^2 + 4x - 5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \quad (\text{За означенням логарифма})$$

$$x^2 + 4x - 5 = 16$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

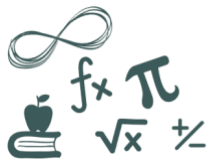
$$\text{За теоремою Вієта} \left| \begin{array}{l} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{array} \right.$$

Відповідь: $-7; 3$

2) $\log_2 x + \log_5 x = \frac{1}{\lg 5}$

$$\frac{\log_5 x}{\log_5 2} + \log_5 x = \frac{1}{\log_5 5}$$

Перейшли до логарифмів з основою 10



$$\frac{\log_5 x}{\log_5 2} + \log_5 x = \log_5 10$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Так як } \frac{1}{\frac{\log_5 5}{\log_5 10}} = \frac{1}{\frac{1}{\log_5 10}} = 1 : \frac{1}{\log_5 10} = 1 \cdot \\ \frac{\log_5 10}{1} = \log_5 10 \end{array} \right.$$

$$\log_5 x + \log_5 x \cdot \log_5 2 = \log_5 10 \cdot \log_5 2 \quad (\text{Помножили на } \log_5 2)$$

$$\log_5 x (1 + \log_5 2) = \log_5 10 \cdot \log_5 2$$

$$\log_5 x (\log_5 5 + \log_5 2) = \log_5 10 \cdot \log_5 2 \quad (\text{Так як } \log_5 5 = 1)$$

$$\log_5 x \cdot \log_5 10 = \log_5 10 \cdot \log_5 2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{За теоремою про логарифм добутку,} \\ \text{розглянутою на уроці №7} \end{array} \right)$$

$$\log_5 x = \log_5 2 \quad (\text{Поділили обидві частини рівняння на } \log_5 10)$$

$$x = 2$$

Відповідь: 2;

№8

Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_{\frac{1}{3}} x > 1$$

$$2) \log_{0,5}(2x + 1) \geq -2$$

$$3) \lg(x^2 - x) \leq \lg(3x - 3)$$

$$4) \log_{0,7}(x^2 - 2x - 3) \leq \log_{0,7}(9 - x)$$

Розв'язок:

$$1) \log_{\frac{1}{3}} x > 1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \quad \left(\text{Так як } \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < \frac{1}{3} \\ x > 0 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \text{За теоремою, розглянутою на уроці №11} \\ \log_a f(x) > \log_a g(x) \mid \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \\ 0 < a < 1 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < \frac{1}{3} \\ x > 0 \end{array} \right. \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{3}$$

Відповідь: $(0; \frac{1}{3})$;

$$2) \log_{0,5}(2x + 1) \geq -2$$

$$\log_{0,5}(2x + 1) \geq \log_{0,5} 4 \quad (\text{Так як } \log_{0,5} 4 = -2)$$



$$\begin{cases} 2x + 1 \leq 4 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{За теоремою, розглянутою на уроці №11} \\ \log_a f(x) > \log_a g(x) \mid \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x + 1 \leq 4 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \leq 3 \\ 2x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1,5 \\ x > -0,5 \end{cases} \Rightarrow -0,5 < x \leq 1,5$$

Відповідь: $(-0,5; 1,5]$

3) $\lg(x^2 - x) \leq \lg(3x - 3)$

$$\begin{cases} x^2 - x \leq 3x - 3 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{За теоремою, розглянутою на уроці №11} \\ \log_a f(x) > \log_a g(x) \mid \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ a > 1 \end{cases} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 3x + 3 \leq 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \\ x(x - 1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 3)(x - 1) \leq 0 \\ x(x - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - 3)(x - 1) \leq 0 \\ \text{Корені } \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ \text{Урахуємо, що це парабола} \\ \text{і знак нерівності " } \leq \text{ " } \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x(x - 1) > 0 \\ \text{Корені } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ \text{Знак нерівності " } > \text{ " } \end{array} \right\} \Rightarrow 0 > x > 1$$
$$\Rightarrow 1 < x \leq 3$$

Відповідь: $(1; 3]$

4) $\log_{0,7}(x^2 - 2x - 3) \leq \log_{0,7}(9 - x)$

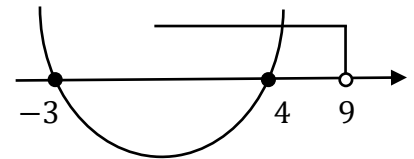
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 9 - x \\ 9 - x > 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{За теоремою, розглянутою на уроці №11} \\ \log_a f(x) > \log_a g(x) \mid \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 12 \geq 0 \\ x < 9 \end{cases}$$



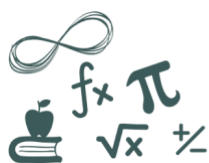
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ \text{За теоремою Вієта} \left| \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{array} \right. \\ \text{Урахуємо, що це парабола} \\ \text{і знак нерівності " } \geq \text{"} \\ x < 9 \end{array} \right. \Rightarrow -3 \geq x \geq 4$$

Відповідь: $(-\infty; -3] \cup [4; 9)$



IV. Підсумок уроку

- Які рівняння називають логарифмічним?
- Які нерівності називаються найпростішими логарифмічними нерівностями?
- Чи існує логарифм від'ємного числа або нуля?
- Як розв'язати рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$?
- Як розв'язати найпростішу логарифмічну нерівність? Наведіть приклад.
- Сформулюйте основну логарифмічну тотожність
- Сформулюйте основні властивості логарифмів
- Як розв'язувати більш складні логарифмічні рівняння? Чи можна дотримуватися якогось єдиного алгоритму?
- Як розв'язати нерівність типу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність типу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $0 < a < 1$?
- Запишіть формулу переходу від однієї основи до іншої та наслідки з неї
- У чому полягає графічний спосіб розв'язування логарифмічних рівнянь?



V. Домашнє завдання

Повторити §1 (ст.20-37)

Виконати № 4.8 (2,4,6); 4.10 (3); 4.16 (2,3,6); 4.18 (3,4); 7.2 (6); 7.4 (5,6); 7.8 (3); 7.10 (6)

Мерзляк А.Г.

Повторити §4-7

Виконати № 6.8 (3,4); 6.16 (2); 6.20 (2); 6.24 (3,4); 7.2 (3,4); 7.6 (3,4); 7.10 (2)

Істер О.С.

Повторити §3-5

Виконати № 5.1.2 (3,4); 5.1.4 (3,4); 5.1.6 (2,4); 5.2.1 (2,4); 5.2.3 (2,3); 5.2.4 (2,3); 5.2.5 (2,4)

Нелін Є.П.

Повторити §3-4

Виконати № 155 (б,г); 161 (а,г); 163 (б,г); 166 (б,г); 176 (в,б); 178 (б); 180 (а,в);

Бевз Г.П.